

آزمون کورس ریاضیاتی

زمان: ۱۲۰ دقیقه

نمره کل: ۶۳,۵

در سوالاتی که جواب نهایی باید تا سه رقم اعشار گرد شود هر سه رقم را حتی در صورت صفر بودن بنویسید.

$$1.2 \rightarrow 1.200$$

برای اعداد مختلط هر دو جزء به این صورت نوشته شود.

$$1.2+3i \rightarrow 1.200+3.000i$$

زوایا به رادیان است.

۱- ضرب‌های زیر را محاسبه کنید (هر درایه (خانه) در ماتریسِ جواب یک چهارم نمره. به ماتریس با طول و عرض اشتباه نمره داده نمی‌شود. ۶,۵ نمره).

الف)  $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

ب)  $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 23 & 1 \end{pmatrix}$

ج)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 8 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

د)  $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 10 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

۲- دترمینان ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید (دو ماتریس اول هر کدام نیم نمره. ماتریس سوم دو نمره. ماتریس چهارم چهار نمره).

الف)  $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$

ب)  $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$

ج)  $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 5 \\ 10 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

د)  $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 9 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 11 \end{vmatrix}$

۳- مقدار وارون (معکوس, inverse) ماتریس‌های زیر را پیدا کنید (هر عدد نیم نمره مجموع 6.5 نمره. اعداد نهایی تا سه رقم اعشار گرد شود).

الف)  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

ب)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 10 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

۴- برای ماتریس‌های زیر آیگن ولیوها و آیگن وکتورها را پیدا کنید (هر آیگن ولیو یا آیگن وکتور ۰,۷۵ نمره. مجموع ۶ نمره).  
 اعداد تا سه رقم گرد شوند. آیگن وکتورها به گونه‌ای نوشته شود که یکی از اعداد آن یک باشد مثل  $\begin{pmatrix} 3.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$  یا  $\begin{pmatrix} 1.000 \\ 0.333 \end{pmatrix}$

الف)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 3.5 \end{pmatrix}$

ب)  $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

۵- محاسبات زیر را انجام دهید و جواب را به صورت یک عدد مختلط بنویسید (جواب تا سه رقم اعشار گرد شود. عبارت اول نیم نمره. سه عبارت بعدی یک نمره. مجموع ۳,۵ نمره).

الف)  $(3 + 2i)(2 - 5i)$

ب)  $\left( \frac{4.6+3.2i}{2-4.5i} \right)$

ج)  $\frac{6i}{3+5i}$

د)  $e^{(4+3.3i)}$

۶- مشتق عبارات زیر نسبت به  $x$  را در  $x=2$  حساب کنید (هر کدام یک نمره. تا سه رقم اعشار گرد کنید).

a) $x^2 e^x$	e) $\sqrt{\ln x}$
b) $\frac{1}{1+\cos^2 x}$	f) $\tan \frac{1}{x+3}$
c) $e^{x^{2.5}}$	g) $2^{x \sin x}$
d) $\sin x + \cos x$	h) $x \log_3 x$

۷- برای سیستمی به شکل زیر امکان پذیر بودن هر یک از موارد زیر را با توجه به استدی استیتهای گفته شده مشخص کنید (ممکن را با ص و غیرممکن را با غ مشخص کنید). (یک و نیم نمره. نمره منفی برابر گزاره)

$x' = f(x, y)$

$y' = g(x, y)$

الف) یک ناحیه شامل دو گره پایدار (stable node) که جوابی از آن خارج نشود.	ب) یک cycle graph که به دور دو نقطه زینی (saddle) و یک گره پایدار می‌چرخد و به آن‌ها نزدیک می‌شود.
ج) یک limit cycle به دور یک گره پایدار و یک گره ناپایدار.	د) یک جواب دوره‌ای (periodic) ناپایدار دور یک گره ناپایدار.
ه) یک limit cycle که دور یک saddle و دو مارپیچ ناپایدار (که مارپیچ‌های ناپایدار در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخند)، می‌چرخد.	و) یک جواب دوره‌ای ناپایدار که به دور دو مارپیچ که یکی در جهت عقربه‌های ساعت و دیگری خلاف عقربه‌های ساعت است می‌چرخد.

۸- مختصات نقاط زیر را از قطبی  $(r, \theta)$  به کارتزین  $(x, y)$  یا بالعکس تبدیل کنید (تا سه رقم اعشار گرد شود). زاویه به رادیان و به صورت عددی بین  $0$  و  $2\pi$  نوشته شود. (چهار نمره)

الف) $x=6, y=4$	ب) $x=-3, y=-1$
ج) $r=3, \theta=0.2$	د) $r=1, \theta=4$

۹- برای هر یک از سیستم‌های زیر حالات ایستا (steady state) را بدست بیاورید (اعداد تا سه رقم اعشار گرد شود). هر بخش دو نمره. (مجموع ۴) (\* علامت ضرب است).

الف)

$$x' = e^y + x$$

$$y' = 3 * 2^y + x^2$$

ب)

$$x' = \frac{x}{1+y} - 1$$

$$y' = x * e^x + y * e^y$$

۱۰- برای سیستم‌های سوال بالا ژاکوبین را در نقطه زیر حساب کنید (اعداد تا سه رقم اعشار گرد شوند. مجموعاً ۴ نمره).

$$x = 1.610$$

$$y = 2.443$$

۱۱- در هر مورد با توجه آنگن ولیوهای سیستم خطی رفتار سیستم (نوع نقطه ایستا) در نقطه  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  را از عبارات داده شده انتخاب کنید و بنویسید (یک نمره).

(گره پایدار , گره ناپایدار , خط پایدار , خط ناپایدار , مارپیچ پایدار , مارپیچ ناپایدار , مارپیچ در جهت عقربه‌های ساعت , مارپیچ خلاف جهت عقربه‌های ساعت , مرکز , نقطه زینی (saddle))

الف) -2, -3	ب) 3, -4	ج) $2+8i, 2-8i$	د) 3, 0
-------------	----------	-----------------	---------

۱۲- با در نظر گرفتن تابع داده شده ناحیه‌ای که طبق قضیه دولاک (dulac) سیستم زیر در آن جواب دوره‌ای (periodic) ندارد را بدست آورید و قرار گرفتن نقاط زیر در آن ناحیه را مشخص کنید (اگر نقطه در آن ناحیه قرار دارد ص و اگر خارج از آن است غ را بنویسید) (سه نمره. نمره منفی برابر نمره گزاره).

$$B = \frac{1}{y}$$

$$x' = \frac{y}{x} - 2y^2$$

$$y' = \frac{y^4}{5} + xy + 1$$

الف) $x=1, y=2$	ب) $x=0.4, y=5$
ج) $x=0.3, y=2$	د) $x=0.5, y=2$
ه) $x=0.4, y=4$	و) $x=0.2, y=6$

۱۳- با توجه به اطلاعات زیر مقدار عددی  $r'$  و  $\theta'$  را در مختصات داده شده محاسبه کنید (تا سه رقم اعشار گرد شود. زاویه به رادیان است. چهار نمره).

الف)

$$x' = \sin x + \frac{y}{x}$$

$$y' = -y - x^2$$

$$x=4$$

$$y=9$$

.

(ب)

$$x' = 2$$

$$y' = 9$$

$$x = 3$$

$$y = 2$$

۱۴- مجهول خواسته شده با علامت سوال را بدست آورید (تا سه رقم اعشار گرد شود. دو نمره).

$$x' = x$$

$$y' = y + x$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{y(2)}{x(2)} = ?$$

۱۵- اگر رقابت دو گونه گیاه خوار به شکل زیر باشد: (هر واحد برابر با هزار جاندار است) (تا سه رقم اعشار گرد شود)

$$x' = 2x^2 - 3y - 2$$

$$y' = -3x + 4y$$

الف) نقطه تعادل رقابت این دو گونه را پیدا کنید (یک نمره).

ب) ژاکوبین در این نقطه را بیابید (یک نمره).

ب) نوع نقطه تعادل را بیابید (نیم نمره).